ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur,
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun
Ecole Supérieure des Industries du Textile et de l'Habillement
ESITH

Concours National Commun d'admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou assimilées
Session 2010

ÉPREUVE DE PHYSIQUE II

Filière **MP**

Durée 4 heures

Cette épreuve comporte 9 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve comporte 9 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Les conducteurs électriques

Le présent problème propose l'étude de quelques aspects des milieux conducteurs soumis à l'action d'un champ électrique variable dans le temps. Il est composé de trois parties largement indépendantes entre elles.

Dans les applications numériques, qui ne doivent pas être négligées, une attention particulière sera prêtée au nombre de chiffres à utiliser pour afficher les résultats. Ce nombre, qui dépend en général du niveau de précision recherché, ne doit en aucun cas dépasser le nombre de chiffres significatifs permis par les données. La valeur numérique de toute grandeur physique doit être accompagnée de son unité dans le système international des unités (SI).

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Données pour toute l'épreuve

- Célérité de la lumière dans le vide : $c \simeq 3,0 \times 10^8 m.s^{-1}$;
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 \simeq 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$;
- Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c_0^2}$;
- Nombre d'AVOGADRO : $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23} \, mol^{-1}$;
- Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19} \, C$;
- Masse de l'électron : $m = 9,1.10^{-31} \, kg$;

On rappelle les équations de MAXWELL dans le vide en présence de charges ρ et de courants $\overrightarrow{j}$, et la loi de conservation de la charge électrique :

$$div\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad div\,\overrightarrow{B} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \quad ; \quad \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right)$$

$$div\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

ainsi que la relation de l'analyse vectorielle, pour un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$:

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{grad}(div\,\overrightarrow{A}) - \Delta \overrightarrow{A}$$

1ère partie
Conduction électrique dans un milieu matériel

On considère un milieu matériel homogène de dimension supposée infinie. La conduction électrique dans un tel milieu est due au déplacement des porteurs de charge. On note n la densité volumique des porteurs de charges susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}(M,t)$. On suppose que chaque porteur de charge est de masse m et possède une charge q.

Dans la suite, le poids du porteur de charge et la force d'origine magnétique seront négligés.

1.1. Conductivité électrique d'un milieu matériel

En plus de l'action du champ électrique, on modélise l'interaction d'un porteur de charge avec le reste du milieu par :

- une force d'amortissement visqueux : $\vec{F}_a = -\dfrac{m}{\tau}\vec{v}$
- une force de rappel : $\vec{F}_r = -m\,\omega_0^2\,\vec{r}$

$\vec{r}$ étant le vecteur position du porteur de charge, mesuré par rapport à sa position d'équilibre, et $\vec{v}$ sa vitesse par rapport à un référentiel lié au milieu matériel. La constante τ est la durée caractéristique de la relaxation des vitesses.

1.1.1. En appliquant la loi fondamentale de la dynamique, écrire l'équation du mouvement du porteur de charge dans le milieu matériel.

1.1.2. Le milieu matériel est soumis à un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω : $\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega\,t)$, auquel on associe le champ complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0\exp(i\,\omega\,t)$$

i étant le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1.1.2.1. Justifier le choix de l'étude en régime sinusoïdal.

1.1.2.2. Déterminer l'expression complexe de la vitesse $\vec{v}$ du porteur de charge en régime sinusoïdal établi de pulsation ω.

1.1.3. Écrire l'expression de la densité volumique de charges ρ associée aux porteurs mobiles en fonction de n et q.

1.1.4. On admet que la densité de courant $\vec{j}$ est liée à la vitesse par la relation : $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Écrire l'expression de la densité de courant $\vec{j}$ en fonction de n, q et $\vec{v}$.

1.1.5. A partir de l'expression complexe de la vitesse établie dans la question 1.1.2.2., donner l'expression complexe de la densité de courant $\vec{j}$.

1.1.6. En déduire qu'en régime établi, on peut écrire la loi d'Ohm sous la forme : $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Montrer alors que ce modèle permet de définir une conductivité complexe :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\,\omega\,\tau\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)} \tag{1}$$

où σ_0 est la conductivité statique dont on donnera l'expression en fonction de n, q, τ et m.

1.2. Étude d'un milieu conducteur

On considère que le milieu matériel est un milieu conducteur pour lequel les porteurs de charges sont supposées libres de se déplacer dans le milieu matériel, c'est à dire qu'ils ne sont pas soumis à la force de rappel ($\omega_0 = 0$).

1.2.1. Donner l'expression de la conduction électrique complexe d'un milieu conducteur.

1.2.2. Montrer que la conductivité complexe peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma = \sigma_1 - i\,\sigma_2 \tag{2}$$

Donner les expressions de σ_1 et de σ_2 en fonction de ω, τ et σ_0.

1.2.3. Dans le cas du cuivre, chaque atome libère un seul électron qui participe à la conduction électrique. La masse volumique du cuivre est : $\rho_{Cu} = 8,9.10^3\,kg.m^{-3}$, la masse molaire du cuivre est : $M_{Cu} = 63,5\,g.mol^{-1}$.

1.2.3.1. Donner l'expression du nombre d'électrons de conduction par unité de volume n en fonction de ρ_{Cu}, M_{Cu} et du nombre d'AVOGADRO $\mathcal{N}_A$.

1.2.3.2. Déterminer la valeur numérique de n.

1.2.3.3. La conductivité du cuivre en régime statique est : $\sigma_0 = 6.10^7\,S.m^{-1}$. Déterminer la valeur de la constante de temps τ.

1.2.3.4. Pour quel domaine de fréquences on a : $\omega\,\tau << 1$? On posera : $f_1 = \dfrac{1}{2\pi\tau}$.

On suppose dans les questions suivantes que cette condition est vérifiée.

1.2.4. Donner les expressions approchées au premier ordre en $(\omega\,\tau)$ de σ_1 et de σ_2.

1.2.5. Montrer qu' en notation réelle, le vecteur densité de courant est lié au vecteur champ électrique par la relation :

$$\overrightarrow{j} = \sigma_0\,\overrightarrow{E} + \varepsilon_0\,\chi\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{3}$$

Donner l'expression de χ en fonction de τ, σ_0 et ε_0.

1.2.6. Écrire l'équation de MAXWELL-AMPÈRE dans le milieu conducteur en admettant qu'elle a la même forme que celle du vide à condition d'utiliser la densité de courant donnée par la relation (3).

1.2.7. L'équation de MAXWELL-AMPÈRE précédemment écrite fait apparaître la somme de deux termes : le courant de conduction $\overrightarrow{j_c}$ et d'un courant dit de déplacement $\overrightarrow{j_d}$. En admettant que le courant de conduction a la même expression qu'en basses fréquences, identifier la densité de courant de déplacement $\overrightarrow{j_d}$.

1.2.8. Montrer que le rapport de l'amplitude du courant de conduction à celle du courant de déplacement est donné par :

$$\eta = \frac{j_c}{j_d} = \frac{\sigma_0}{\omega\,\varepsilon_0\,|1+\chi|}$$

1.2.9. En fait, c'est le rapport η qui justifie le caractère isolant ou conducteur du matériau. Le milieu est conducteur si le courant de conduction prédomine ($\eta >> 1$). Au contraire, si le courant de déplacement prédomine, le milieu se comporte comme un isolant.

1.2.9.1. Déterminer la pulsation ω_c pour laquelle le rapport η est égal à l'unité.

1.2.9.2. Déterminer $f_c = \dfrac{\omega_c}{2\,\pi}$ pour le cuivre. Dans quel domaine du spectre électromagnétique cette fréquence est-elle située ? Que peut-on dire du cuivre dans le domaine du rayonnement électromagnétique visible ?

2$^{\text{ème}}$ partie

Propagation d'ondes électromagnétiques dans les conducteurs ohmiques

2.1. Relation de dispersion dans un conducteur ohmique

On considère un conducteur ohmique pour lequel on suppose que la densité volumique de charge est nulle ($\rho = 0$) et le vecteur densité de courant est lié au champ électrique par la relation :

$$\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$$

avec une conductivité σ réelle ($\sigma = \sigma_0$).

2.1.1. Dans quel domaine de fréquences ce modèle de conducteur ohmique est valable ?

2.1.2. Écrire l'équation de Maxwell-Ampère pour un conducteur ohmique.

2.1.3. Établir l'équation de propagation à laquelle satisfait le champ électrique.

2.1.4. Justifier que la solution de cette équation peut s'écrire comme une superposition de solutions monochromatiques.

Par la suite, on cherche les solutions complexes sous forme d'ondes monochromatiques planes se propageant selon l'axe Oz et polarisées rectilignement selon Ox :

$$\overrightarrow{E}(z,t) = E(z)\ \exp\left(i\ \omega\ t\right)\ \overrightarrow{u}_x$$

2.1.5. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $E(z)$.

2.1.6. On cherche les solutions de cette équation, de manière semblable à celle des ondes progressives, sous la forme :

$$E(z) = E_1 \exp(i\ k\ z) + E_2 \exp(-i\ k\ z)$$

avec le nombre d'onde (ou vecteur d'onde) k à priori complexe. Montrer que k vérifie l'équation :

$$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - i\omega\mu_0\sigma \tag{4}$$

2.1.7. On ne considère dans cette question que la solution $E_1 \exp(ikz)$ et on ne tient pas compte des champs statiques.

2.1.7.1. Déterminer l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}(z,t)$ en fonction de k, ω, $\overrightarrow{E}_1(z,t)$ et le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_z$.

2.1.7.2. Le champ magnétique est-il en phase avec le champ électrique ? Justifier.

Plutôt que de décrire le cas général, nous allons discuter les deux cas limites correspondant aux situations où l'un des deux termes du second membre de k (équation 4) est négligeable devant l'autre.

2.2. Propagation dans un mauvais conducteur

Les mauvais conducteurs électriques, aussi appelés milieux à pertes, sont tels que : $\sigma << \epsilon_0\omega$.

2.2.1. Déterminer l'expression approchée du vecteur d'onde k. Montrer que ce vecteur d'onde peut être exprimé, en fonction du vecteur d'onde $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$ dans le vide et d'une longueur caractéristique l_p, sous la forme :

$$k = k_0 - i\frac{1}{l_p}$$

Donner l'expression de l_p en fonction de ϵ_0, μ_0 et σ.

2.2.2. Comparer la longueur caractéristique l_p par rapport à la longueur d'onde dans le vide λ. Commenter.

2.2.3. Écrire l'expression complexe du champ électrique $E(z,t)$ en tenant compte de ses deux termes de la question 2.1.6.

2.2.4. En déduire l'expression réelle du champ électrique. Interpréter chacun des deux termes de cette expression. Tracer l'allure des variations de chaque terme du champ en fonction de z à t fixé.

2.2.5. Montrer que la propagation de l'onde électromagnétique dans le conducteur s'accompagne d'une dissipation d'énergie. Que devient l'énergie perdue par l'onde électromagnétique ? Commenter l'expression de la distance d'absorption l_p.

2.3. Propagation dans les bons conducteurs : l'effet de peau

Pour les bons conducteurs, la situation est telle que $\epsilon_0\omega << \sigma$ et on ne garde dans l'expression du nombre d'onde que le terme dominant.

2.3.1. Déterminer l'expression approchée du vecteur d'onde k et mettre en évidence une longueur caractéristique δ. Donner l'expression de δ en fonction de μ_0, ω et σ. Quel est le nom habituel de cette longueur caractéristique ?

2.3.2. Comparer la longueur caractéristique δ par rapport à la longueur d'onde dans le vide λ. Commenter.

2.3.3. Écrire l'expression complexe du champ électrique $E(z,t)$ en tenant compte de ses deux termes de la question 2.1.6. En déduire l'expression réelle du champ électrique. Commenter l'expression de la distance d'atténuation δ.

2.3.4. Que pensez vous de la propagation de l'énergie électromagnétique dans un bon conducteur ? Comparer au cas de la propagation dans un mauvais conducteur.

Afin de comparer le comportement des deux types de conducteurs étudiés ci-dessus vis-à-vis de l'énergie électromagnétique véhiculée par une onde électromagnétique incidente, nous allons étudier la réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur.

2.4. Réflexion d'une onde électromagnétique par un conducteur réel

On considère que le demi espace $z < 0$ est vide tandis qu'un conducteur de conductivité σ occupe le demi espace $z > 0$. Une onde électromagnétique plane progressive harmonique de pulsation ω se propage dans le vide suivant la direction Oz, dans le sens des z croissants et polarisée rectilignement suivant Ox. Cette onde, appelée onde incidente, arrive sous incidence normale sur le milieu conducteur (figure 1). Une partie de l'énergie de l'onde est réfléchie, une autre est transmise.

Il en résulte que dans le vide ($z < 0$), le champ est la superposition d'une onde incidente et d'une

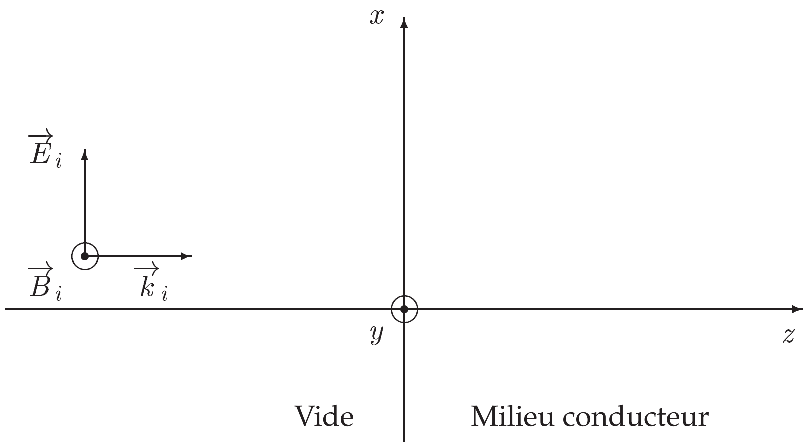

Figure 1: Onde électromagnétique en incidence normale sur un milieu conducteur

onde réfléchie :

$$\overrightarrow{E}_v(z,t) = E_i \exp\left(i\left(\omega t - k_0 z\right)\right)\overrightarrow{u}_x + E_r \exp\left(i\left(\omega t + k_0 z\right)\right)\overrightarrow{u}_x$$

E_i et E_r désignent les amplitudes complexes des champs électriques des ondes incidente et réfléchie respectivement.

2.4.1. Déterminer les expressions du champ magnétique $\overrightarrow{B}_i(z,t)$ de l'onde incidente et $\overrightarrow{B}_r(z,t)$ de l'onde réfléchie. En déduire l'expression du champ magnétique résultant dans la région $z < 0$.

Dans le milieu conducteur ($z > 0$), comme nous considérons que celui-ci s'étend jusqu'à l'infini, seule la solution qui décroît exponentiellement vers la droite est acceptable. On écrit le champ électrique de l'onde transmise sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(z,t) = E_t \exp\left(i\left(\omega t - k\, z\right)\right)\overrightarrow{u}_x$$

E_t étant l'amplitude complexe du champ électriques de l'onde transmise dans le milieu conducteur.

2.4.2. Déterminer l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}_t(z,t)$ de l'onde transmise dans le conducteur.

2.4.3. Écrire, sans les démontrer, les conditions que doivent vérifier les champs électrique et magnétique sur l'interface entre le vide et le milieu conducteur.

2.4.4. Établir les deux relations liant E_i, E_r et E_t.

2.4.5. En déduire les expressions de E_r et E_t en fonction de E_i, k_0 et k.

2.4.6. **Cas du mauvais conducteur**

2.4.6.1. Dans le cas d'un mauvais conducteur, déterminer les expressions approchées des amplitudes E_r et E_t des champs électriques associés à l'onde réfléchie et à l'onde transmise par ce conducteur respectivement. On utilisera l'expression approchée de k établie dans la section 2.2.

2.4.6.2. Comparer E_r et E_t par rapport à l'amplitude E_i du champ électrique associé à l'onde incidente. Commenter.

2.4.7. Cas du bon conducteur

2.4.7.1. Déterminer les expressions approchées, à l'ordre le plus petit non nul en $k_0\delta$, des amplitudes E_r et E_t des champs électriques associés à l'onde réfléchie et à l'onde transmise dans le milieu conducteur respectivement.

2.4.7.2. Comparer E_r et E_t par rapport à l'amplitude E_i du champ électrique associé à l'onde incidente. Commenter.

2.4.8. Conclure quant au comportement des deux types de conducteurs étudiés ci-dessus vis-à-vis de l'énergie électromagnétique véhiculée par une onde électromagnétique incidente.

3$^{\text{ème}}$ partie
Propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma

Un plasma est un gaz partiellement ou totalement ionisé. C'est donc un milieu globalement neutre dans lequel on trouve des électrons, des ions et éventuellement des atomes ou des molécules neutres. Comme les ions sont plus de mille fois plus lourds que les électrons, l'amplitude de leurs mouvements et donc le courant électrique qui leur est associé est négligeable devant le courant électronique. Pour les plasmas, l'inertie des électrons est un phénomène important. On s'intéresse donc au cas plus général où l'inertie compte et on utilise l'expression de la densité de courant donnée par l'expression :

$$\overrightarrow{j} = \frac{n\,e^2\tau}{m\,(1+i\omega\tau)}\overrightarrow{E} \tag{5}$$

n étant la densité volumique des électrons libres.

On peut distinguer deux régimes : les basses fréquences, où la dissipation est dominante et les hautes fréquences où les effets d'inertie deviennent dominants et des nouveaux phénomènes apparaissent.

3.1. Dynamique d'un plasma libre

3.1.1. En utilisant la relation (5) écrire l'équation d'évolution dans le temps de la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$.

3.1.2. En utilisant la relation de conservation de la charge électrique et les équations de MAXWELL, montrer que la densité volumique de charge ρ obéit à l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \omega_p^2\rho = 0 \tag{6}$$

τ est le temps caractéristique d'amortissement de la vitesse et ω_p une pulsation appelée pulsation plasma. Montrer que ω_p est donnée par :

$$\omega_p^2 = \frac{n\,e^2}{m\epsilon_0}$$

3.1.3. Pour des faibles densités électroniques, la pulsation plasma est faible et le terme d'amortissement prédomine dans l'équation précédente. Prévoir l'évolution dans le temps de la densité volumique de charge ρ.

3.1.4. Pour une faible dissipation et une densité électronique importante, donner une forme approchée de l'équation (6). Montrer que le plasma est le siège d'oscillations dont on donnera la pulsation.

3.2. Propagation d'ondes dans un plasma

Comme dans un plasma la densité locale de charge peut être différente de zéro, la divergence du champ électrique n'est pas nécessairement nulle. On distingue deux types d'onde : les ondes transverses pour lesquelles $div\overrightarrow{E} = 0$, et les ondes longitudinales. Dans la suite, on ne considérera que les ondes transverses.

Le plasma sera considéré comme un milieu dilué dont les charges sont sans interaction entre elles. Nous tiendrons compte seulement des effets inertiels et nous admettrons que la densité de courant est liée au champ électrique par la relation approchée suivante :

$$\overrightarrow{j} = \frac{1}{i\omega}\frac{n\,e^2}{m}\overrightarrow{E}$$

3.2.1. Écrire l'expression de la densité de courant $\overrightarrow{j}$ en fonction de ω, ω_p, ϵ_0 et $\overrightarrow{E}$.

3.2.2. Relation de dispersion

On considère une onde se propageant dans le plasma suivant la direction Oz dont l'expression complexe du champ électrique associé est :

$$\overrightarrow{E}(z,t) = \overrightarrow{E}_0 \exp\left(i\left(\omega t - k\,z\right)\right)$$

3.2.2.1. Déterminer l'équation de propagation à laquelle obéit le champ électrique $\overrightarrow{E}$.

3.2.2.2. Montrer que la relation de dispersion liant k à ω s'écrit sous la forme suivante :

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)$$

La pulsation plasma ω_p sépare deux zones de fréquence où le plasma a des comportements très différents.

3.2.3. Domaine des basses fréquences ($\omega < \omega_p$)

3.2.3.1. Déterminer l'expression du vecteur d'onde k dans le domaine des basses fréquences.

3.2.3.2. Détermine l'expression du champ électrique dans le cas des basses fréquences. Comment peut-on qualifier l'onde électromagnétique associée ? Montrer que pour de telles fréquences, il n'y a aucune propagation dans le plasma et que ce milieu réfléchit parfaitement les ondes électromagnétiques.

3.2.3.3. Dans l'ionosphère (partie de l'atmosphère située à quelques centaines de kilomètres d'altitude qui est partiellement ionisée), la densité en électrons libres est de l'ordre de $n = 10^{10}$ électrons par m^3. Quel est le domaine de fréquence correspondant aux ondes électromagnétiques réfléchies par l'ionosphère ? Voyez-vous une application pratique ?

3.2.4. Domaine des hautes fréquences ($\omega > \omega_p$)

3.2.4.1. Déterminer l'expression du vecteur d'onde k dans le domaine des hautes fréquences ($\omega > \omega_p$).

3.2.4.2. Détermine l'expression du champ électrique dans le cas des hautes fréquences. Quelle est la nature de l'onde correspondante ? Déterminer sa vitesse de phase v_ϕ. Tracer $v_\phi(\omega)$. Commenter.

3.3. Propagation d'un battement entre deux ondes dans un plasma

On considère la superposition de deux ondes se propageant dans le plasma selon $0z$ et polarisées selon Ox. La première a une pulsation ω_1 et un nombre d'onde k_1 tandis que la seconde a une pulsation ω_2 et un nombre d'onde k_2. Ces deux ondes ont une même amplitude E_0. Soit en notation réelle :

$$\overrightarrow{E} = E_0 \left(\cos\left(\omega_1 t - k_1 z\right) + \cos\left(\omega_2 t - k_2 z\right)\right) \overrightarrow{u}_x$$

On suppose que les deux pulsations sont proches et on pose : $\omega_2 - \omega_1 = \delta\omega \ll \omega_1$ et $k_2 - k_1 = \delta k \ll k_1$.

3.3.1. Montrer que l'onde résultante est progressive de haute fréquence : $\omega_m = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ d'amplitude modulée par une enveloppe basse fréquence, qui constitue elle-même une onde progressive de pulsation ω_b dont on donnera l'expression.

3.3.2. Déterminer les vitesses de propagation v_r de l'onde haute fréquence et v_g de l'onde basse fréquence. Quel est le nom habituel de v_g ? Donner les expressions approchées de v_r et v_g en fonction de ω_1, ω_p et c. Commenter.

FIN DE L'ÉPREUVE